

ABORDAGEM GEOMÉTRICA DE UM PROBLEMA DE PROGRAMAÇÃO LINEAR EM DOIS NÍVEIS

Aline Viana Souza

Graduada em Matemática / UENF
avianadesouza@yahoo.com.br

Luis Humberto Guillermo Felipe

Doutor em Ciências da Engenharia / UENF
guillerm@uenf.br

Recebido: 03 de dezembro de 2012. Revisado: 25 de fevereiro de 2013. Aceito: 08 de março de 2013. Publicado online: 23 de março de 2013.

RESUMO

O presente trabalho busca apresentar uma abordagem geométrica do problema de programação linear em Dois Níveis. Por tratar de problemas que envolvem níveis hierárquicos de decisão, estes problemas apresentam muitas aplicações e por isso tem se tornado cada vez mais uma área de grande importância na programação matemática. Dessa forma, muitos pesquisadores tem se empenhado no aprofundamento teórico e prático deste problema e com o objetivo de facilitar essa compreensão propomos neste trabalho uma apresentação didática e acadêmica para o problema em Dois Níveis, através de problemas de baixa dimensão, ressaltando assim características e propriedades deste.

Palavras-chave: Programação Linear em Dois Níveis e Abordagem Geométrica.

ABSTRACT

This paper intends to provide a geometric approach to the linear Bilevel programming problem. By treating problems involving hierarchical levels of decision Bilevel problems have so many applications and has become an increasingly important area in mathematical programming. Thus, many researchers have been engaged in deepening theoretical and practical this problem and aiming to facilitate this understanding we propose in this paper a didactic and academic presentation for the Bilevel problem through low dimension problems, thus highlighting characteristics and properties this.

Keywords: Linear Bilevel Programming and Geometric Approach.

1. INTRODUÇÃO

As primeiras ideias de problemas em níveis foram introduzidas na programação matemática na década de 70 por Bracken & McGill (1973, *apud* SOBRAL, 2008), onde eram chamados de problemas de otimização nas restrições. Apesar de Stackelberg (1952, *apud* Sobral, 2008) apresentar na década de 50 problemas hierárquicos de Economia bastante similares ao problema de Dois Níveis, foi somente através do trabalho de Candler & Norton (1977) que sua formulação e nomenclatura foram vistas como a conhecemos

hoje. Assim, de maneira geral, segundo Campêlo (1999) a formulação do modelo linear do problema em Dois Níveis pode ser apresentada da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
 & \text{(PLDN): } \text{Max}_{x,y} \quad c_1^T x + c_2^T y \\
 & \text{s.a.} \quad \left\{ \begin{array}{l} A_1 x + A_2 y \leq a, \\ x \geq 0, y \text{ solução de} \\ (P_x): \text{Max}_y \quad d^T y \\ \text{s.a.} \quad \left\{ \begin{array}{l} B_1 x + B_2 y \leq b \\ y \geq 0 \end{array} \right. \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

Onde:

$$x, c_1 \in \mathbb{R}^n; \quad c_2, d, y \in \mathbb{R}^m; \quad a \in \mathbb{R}^k; \quad b \in \mathbb{R}^k; \quad A_1 \in \mathbb{R}^{k \times n}; \quad A_2 \in \mathbb{R}^{k \times m}; \quad B_1 \in \mathbb{R}^{k \times n} \text{ e } B_2 \in \mathbb{R}^{k \times m}.$$

O agente que ocupa o nível superior é chamado de líder e este toma suas decisões (x) controlando parcialmente as decisões do agente de nível inferior, chamado de seguidor. O seguidor por sua vez oferece ao líder suas soluções ótimas (y), que são escolhidas por este da melhor maneira que o convém. Este problema caracteriza-se como um problema de Programação Linear em Dois Níveis (PLDN) quando a função objetivo e as restrições do primeiro e do segundo nível são respectivamente todas lineares.

Estes problemas surgem da necessidade de representar processos decisórios que são estruturados em níveis de hierarquia. Problemas desta natureza podem ser encontrados na economia, na engenharia, na administração, na agricultura, na determinação de preços ótimos em estradas tarifadas, nas redes de distribuição de energia elétrica, gás e petróleo. Encontra-se uma extensa aplicação deste problema nas mais diferentes áreas nos trabalhos de Dempe (2002), Vicente & Calamai (1994).

Devido a grande aplicabilidade em áreas diversas e também como a grande importância dada à programação matemática nos últimos tempos, buscou-se apresentar neste trabalho o problema linear de Dois Níveis ressaltando o aspecto geométrico envolvido na solução deste, objetivando assim facilitar o estudo e a compreensão de características importantes presentes em sua estrutura. Portanto, para efeito didático e acadêmico os problemas aqui abordados apresentam dimensão baixa.

2. REVISÃO DE LITERATURA

De acordo com Vicente (1991), define-se o problema de programação linear em dois níveis (PLDN), também chamado de programação binível (BP), como sendo o problema da programação multi-nível com dois níveis. Muitas características e propriedades podem ser observadas em sua estrutura, como citam Wen & Hsu (1991) e Campêlo (1999), respectivamente.

Existem unidades ou níveis hierárquicos interativos de tomada de decisão (níveis decisórios) em uma estrutura predominantemente hierárquica; A execução das decisões é seqüencial, ou seja, a unidade ou o nível seguidor toma as suas decisões após a definição das decisões da unidade ou do nível líder; Cada unidade ou nível decisório otimiza a sua função objetivo independentemente dos outros níveis, mas é afetado por ações ou reações dos demais níveis; O efeito externo do problema da tomada de decisão pode se refletir tanto na função objetivo como no conjunto das decisões viáveis do outro nível, sendo assim, espaço de decisão é totalmente ou parcialmente determinado por outros níveis.

O conjunto viável V do PLDN está contido no conjunto viável do problema relaxado W . O conjunto solução do PLDN (V^) é formado por pontos extremos do conjunto viável do problema relaxado (W). A solução de um problema de dois níveis, quando existe, é atingida em um ponto extremo do conjunto viável V . Todo ponto extremo de V é ponto extremo do conjunto viável do problema relaxado W . Se as restrições do primeiro nível independem da variável do segundo nível, isto é $A_2 = 0$, então o conjunto viável V do problema de dois níveis é conexo.*

Com uma estrutura hierárquica bastante particular o problema linear de Dois Níveis apresenta uma variedade de aplicações reais. Dessa forma, é possível citarmos alguns dos trabalhos encontrados na literatura que demonstram sua aplicação.

NEVES (2002) – em seu trabalho de doutorado intitulado Modelo de Programação Binível para Alocação Dinâmica de Veículos, aborda a PLDN através da parceria entre os agentes de decisão: transportador e expedidor, que visam respectivamente, a maximização dos lucros e a minimização nos envios de cargas com atraso. Utilizando para isto o algoritmo K-ésimo melhor vértice (Kth – best Algoritm) implementado no software Matematica.

SANTOS (2002) – em sua dissertação de mestrado, Programação em Dois Níveis aplicada ao Estudo da Oferta Ótima de Sistemas Termoeletrônicos, considera a problemática de maximização dos lucros e a minimização dos custos do despacho térmico dos respectivos agentes de decisão. Utilizando como solução deste problema, o método Branch and Bound implementado no Matlab.

LAVAL (2003) – propõe em sua dissertação de mestrado, Modelo de Programação Linear em Dois Níveis para Otimização de Estoques Sobressalentes, um modelo de otimização de estoques, onde os agentes envolvidos, centros de manutenção e depósito central, visam respectivamente, minimizar a quantidade de pedidos atrasados, o desbalanceamento entre os níveis de serviço e minimizar os custos de transporte e de manutenção de estoques.

3. METODOLOGIA

Para o desenvolvimento do trabalho em questão foi explorado inicialmente a literatura decorrente ao assunto, buscando assim o devido embasamento teórico necessário ao estudo proposto, utilizando para isto pesquisas em artigos, sites, teses e livros.

Buscando abordar através da geometria as características e propriedades importantes do problema linear de Dois Níveis, apresentado de maneira clara e evidente nos trabalhos de Campêlo (1999) e Campêlo & Scheimberg (2005), este trabalho foi baseado fundamentalmente nos trabalhos destes autores.

Com o intuito de facilitar a compreensão deste problema através de uma abordagem didática, utilizou-se os softwares Winplot e Matlab 6. 5 como ferramentas que possibilitaram a ilustração da geometria dos conjuntos envolvidos na solução dos problemas lineares de Dois Níveis. Tais problemas, aqui apresentados, exibem apenas duas (exemplo 1) e três dimensões (exemplo 2), enfatizando assim a proposta acadêmica deste trabalho.

4. RESULTADOS E DISCUSSÃO

O problema PLDN a ser abordado neste trabalho apresenta no primeiro nível somente a restrição de não negatividade para a variável do líder (x). Este tipo de problema passará a ser abordado mais adiante como PLDNP. O exemplo abaixo além de ilustrar os conjuntos definidos acima, ele também apresenta um comparativo entre os problemas A e B, demonstrando assim as consequências da presença de uma restrição dependente da variável do seguidor (y) no primeiro nível deste problema.

EXEMPLO1

(A)

Max - x

s.a $x \geq 0$ (1)

max - y

s.a $x + y \leq 4$ (2)

$x - y \leq \frac{3}{2}$ (3)

$y \geq 0$ (4)

(B)

Max - x

s.a. $\frac{x}{2} - y \leq \frac{1}{2}$ (1)

$x \geq 0$ (2)

max - y

s.a. $x + y \leq 4$ (3)

$x - y \leq \frac{3}{2}$ (4)

$y \geq 0$ (5)

➤ O Problema Relaxado:

(A)

Max - x

s.a $x \geq 0$ (1)

$x + y \leq 4$ (2)

$x - y \leq \frac{3}{2}$ (3)

$y \geq 0$ (4)

(B)

Max - x

s.a. $\frac{x}{2} - y \leq \frac{1}{2}$ (1)

$x \geq 0$ (2)

$x + y \leq 4$ (3)

$x - y \leq \frac{3}{2}$ (4)

$y \geq 0$ (5)

➤ Conjunto Viável do Problema Relaxado (W):

$W_A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \leq 4, x - y \leq \frac{3}{2}, x \geq 0, y \geq 0\}$

$W_B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \leq 4, x - y \leq \frac{3}{2}, \frac{x}{2} - y \leq \frac{1}{2}, x \geq 0, y \geq 0\}$

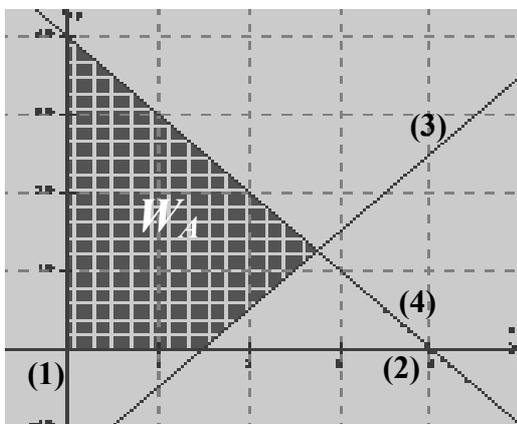


FIGURA 1: Conjunto Viável do Problema Relaxado A.

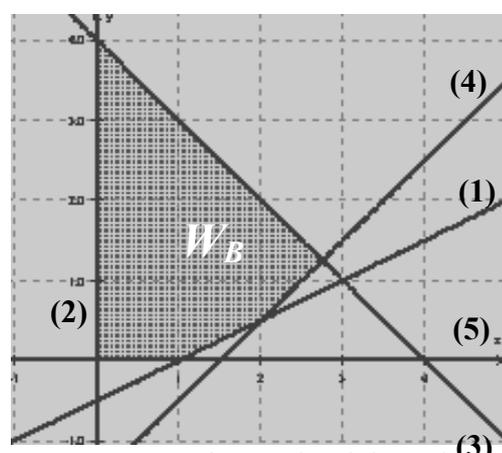


FIGURA 2: Conjunto Viável do Problema Relaxado B.

Na figura 1 o conjunto viável do problema relaxado corresponde à região poligonal delimitada pelas restrições do primeiro e do segundo nível do problema A. Assim como, o conjunto viável do Problema Relaxado da figura 2 é delimitado pelo conjunto de restrições do primeiro e do segundo nível do problema B. É possível observarmos nestas figuras que o conjunto viável do problema B é mais restrito do que o conjunto viável do problema A, devido justamente à presença da restrição 1 no problema B, visto que esta restrição apresenta-se no primeiro nível deste problema e é dependente da variável do seguidor (y).

➤ Conjunto Viável do Problema de Segundo Nível (Vx):

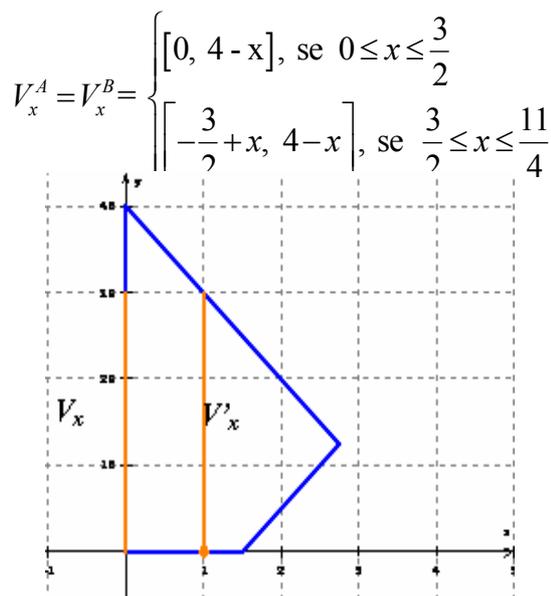


FIGURA 3 – Conjunto viável do problema de Segundo Nível A e B.

Para efeito de visualização, ilustra-se na figura 3 o conjunto $V^*x := \{x\} \times V_x$, ressaltando que o conjunto V_x é a projeção ortogonal sobre o eixo y (intervalo este definido pelo parâmetro x adotado). Como ilustração os conjuntos V^*x e V_x , ambos representados pelos segmentos de cor laranja, foram determinados na figura acima pelo parâmetro $x = 1$.

Percebe-se neste caso, que ambos os problemas (A e B) apresentam o mesmo conjunto viável para o problema do Segundo Nível, conseqüentemente a mesma representação geométrica. Isto acontece porque estes problemas apresentam o mesmo conjunto de restrições para o problema do seguidor.

➤ Conjunto Solução do Problema de Segundo Nível:

$$Arg \max(P_x)^A = Arg \max(P_x)^B = \begin{cases} \{0\}, & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{3}{2} \\ \left\{-\frac{3}{2}+x\right\}, & \text{se } \frac{3}{2} \leq x \leq \frac{11}{4} \end{cases}$$

Função valor :

$$V(x)^A = V(x)^B = \begin{cases} f(x,0) = 0, & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{3}{2} \\ f(x, -\frac{3}{2} + x) = -\frac{3}{2} + x, & \text{se } \frac{3}{2} \leq x \leq \frac{11}{4} \end{cases}$$

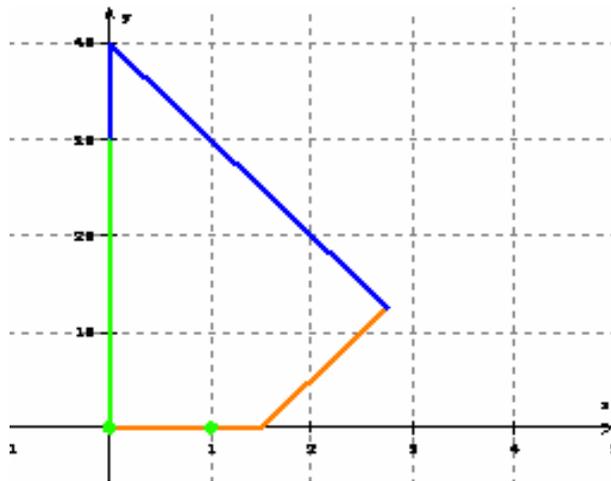


FIGURA 4 – Conjunto solução do problema de Segundo Nível A e B.

O conjunto solução do problema do segundo nível é representado na figura acima pelos segmentos de reta de cor laranja: $y = 0$, para $0 \leq x \leq \frac{3}{2}$ e $y = -\frac{3}{2} + x$, para $\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{11}{4}$.

Para efeito de ilustração adotamos o ponto $x = 1$ como parâmetro. Para este ponto, ilustrado na figura com a cor verde, temos que o conjunto viável do problema de segundo nível é determinado pelo segmento verde projetado no eixo y e para este conjunto de viabilidade, a solução deste problema para $x = 1$ é exatamente $y = 0$, visto que o problema em questão visa maximizar $-y$.

➤ Conjunto Viável do PLDNP e PLDN (V): $V_A = \left\{ (x,0) / 0 \leq x \leq \frac{3}{2} \right\} \cup \left\{ \left(x, -\frac{3}{2} + x \right) / \frac{3}{2} \leq x \leq \frac{11}{4} \right\}$

$$V_B = \left\{ (x,0) / 0 \leq x \leq 1 \right\} \cup \left\{ \left(x, -\frac{3}{2} + x \right) / 2 \leq x \leq \frac{11}{4} \right\}$$

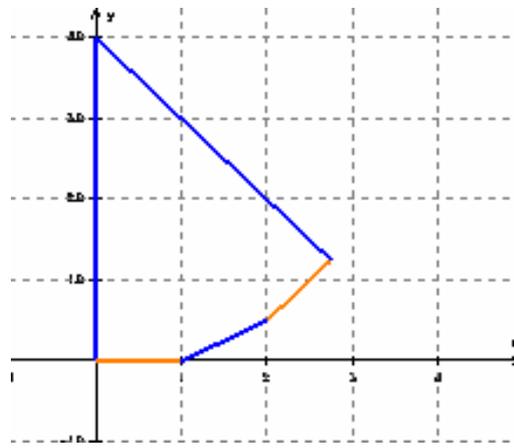
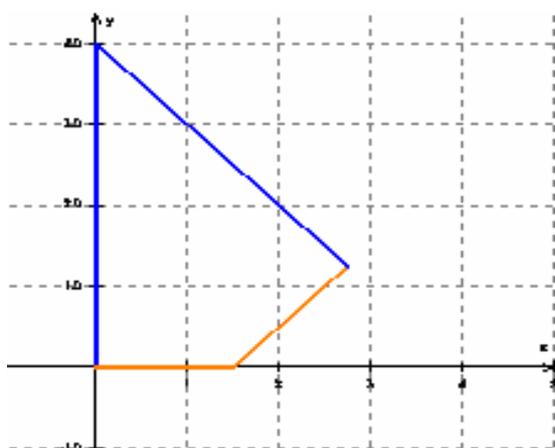


FIGURA 5 – Conjunto viável do problema de Dois Níveis A. ²⁰¹³

FIGURA 6 – Conjunto viável do problema de Dois Níveis B.

O conjunto viável do PLDNP e do PLDN é apresentado na figura acima por um conjunto de pontos (x, y) , definidos na região poligonal pelas arestas de cor laranja, onde a variável x varia para o problema A (figura 5) nos intervalos: $\left[0, \frac{3}{2}\right]$ e $\left[\frac{3}{2}, \frac{11}{4}\right]$ e para o problema B (figura 6) esta variação ocorre nos intervalos: $[0,1]$ e $\left[2, \frac{11}{4}\right]$.

Observamos com este caso que a presença de uma ou mais restrições dependentes da variável do seguidor (y) no primeiro nível de um problema em Dois Níveis, como apresentado no problema B, além de reduzir a região viável deste, gera uma desconexidade neste conjunto (DEMPE, 2002).

➤ Conjunto Solução do PDNLP e PDNL (V^*):

$$V_A^* = V_B^* = \{(0,0)\}$$

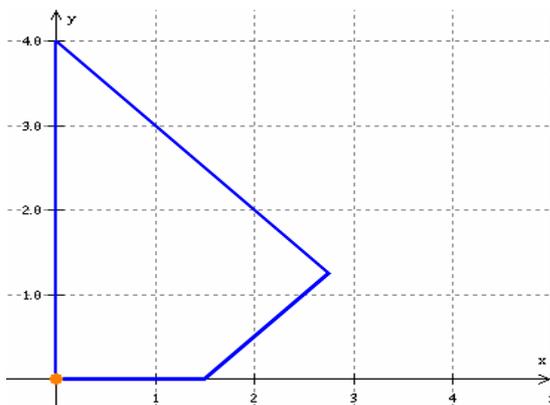


FIGURA 7: Conjunto solução do Problema de Dois Níveis A.

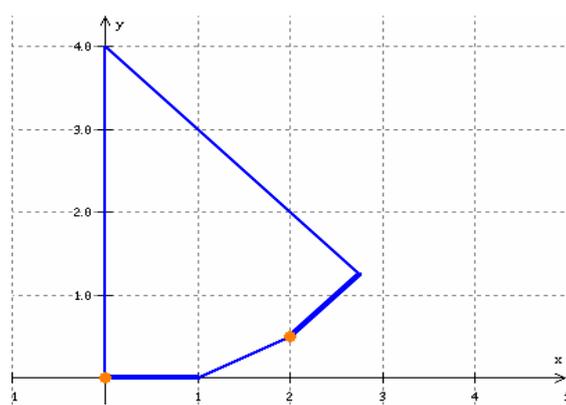


FIGURA 8: Conjunto solução do Problema de Dois Níveis B.

Observamos no problema A (figura 7), que a função objetivo do líder atinge o seu valor máximo no ponto $(0,0)$. Entretanto, devido a desconexidade gerada pela restrição dependente da variável do seguidor, o problema B (figura 8) apresenta duas soluções ótimas: $(0,0)$ e $\left(2, \frac{1}{2}\right)$. Essas soluções são, respectivamente, a solução global e local do problema B. Assim, ambos os problemas A e B, apresentam a solução ótima global $(0,0)$.

Neste exemplo foi possível observar a seguinte particularidade: a desconexidade da região viável do problema B não influenciou na solução global deste problema.

EXEMPLO 2

O exemplo a seguir, adaptado de Campêlo e Scheimberg (2005), tem por objetivo ilustrar o comportamento da geometria dos conjuntos viáveis quando o problema de dois níveis apresenta-se no espaço tridimensional. Neste exemplo, é possível observamos o grau de dificuldade de compreensão deste problema à medida que a quantidade de variáveis de decisão aumenta.

$$Max - x + 2y - 20z$$

$$s.a \quad x \geq 0$$

$$P_x : \max - y + 10z$$

$$s.a \quad x + y + z \leq 3$$

$$x + y - z \geq 1$$

$$x - y + z \leq 1$$

$$-x + y + z \leq 1$$

$$y \geq 0; \quad z \geq 0$$

➤ O Problema Relaxado

$$Max - x + 2y - 20z$$

$$s.a \quad x \geq 0$$

$$x + y + z \leq 3$$

$$x + y - z \geq 1$$

$$x - y + z \leq 1$$

$$-x + y + z \leq 1$$

$$y \geq 0; \quad z \geq 0$$

➤ Conjunto Viável do Problema Relaxado (W):

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}_+^3 : x + y + z \leq 3, x + y - z \geq 1, -x + y + z \leq 1, x - y + z \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$$

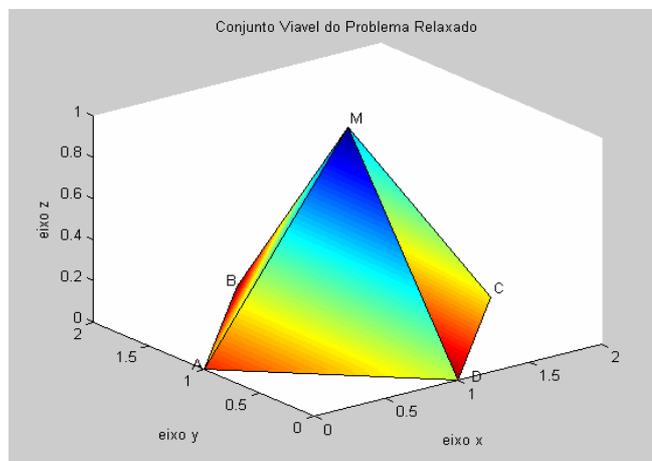


FIGURA 9: Conjunto viável do Problema Relaxado.

O conjunto viável do problema relaxado (W_x) é determinado pela interseção das restrições presentes no problema relaxado, que descreve neste caso, como apresentado na figura acima à região delimitada pela pirâmide de base quadrada com vértices A (0,1,0), B (1,2,0), C (2,1,0), D (1,0,0) e M (1,1,1), ou seja, a interseção das restrições que envolvem o problema relaxado

➤ Conjunto Viável do Problema de Segundo Nível (V_x):

Este conjunto representa o conjunto de soluções (y, z) do problema de segundo nível. Temos neste caso que, para $x \geq 0$:

$$V_x = \begin{cases} \{(1,0)\}, & \text{se } x = 0 \\ \{(y, z) \in \square_+^2: y + z \leq 1 + x; y - z \geq 1 - x; y \geq 0; z \geq 0\}, & \text{se } 0 < x < 1 \\ \{(y, z) \in \square_+^2: y + z \leq 3 - x; -y + z \leq 1 - x; y \geq 0; z \geq 0\}, & \text{se } 1 \leq x < 2 \\ \{(1,0)\}, & \text{se } x = 2 \\ \{ \}, & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

Para uma melhor interpretação geométrica do conjunto (V_x) , consideramos na figura 10, os casos:

$$\begin{cases} 0 \leq x < 1 \\ 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

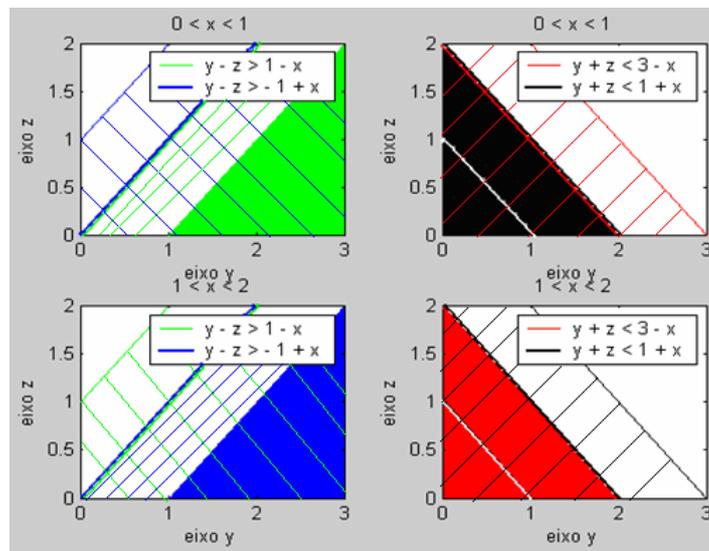


FIGURA10: Interpretação Geométrica do Problema de Segundo Nível para $0 \leq x \leq 2$

Observando a figura acima, temos que:

$$\begin{cases} \forall x \in [0,1]: \begin{cases} y - z > 1 - x \Rightarrow y - z > -1 + x \\ y + z < 1 + x \Rightarrow y + z < 3 - x \end{cases} \\ \forall x \in [1,2]: \begin{cases} y - z > -1 + x \Rightarrow y - z > 1 - x \\ y + z < 3 - x \Rightarrow y + z < 1 + x \end{cases} \end{cases}$$

Então, para x no intervalo $[0,1]$ a restrição $y - z > 1 - x$ garante a restrição $y - z > -1 + x$. Assim como, a restrição $y + z < 1 + x$ garante a restrição $y + z < 3 - x$. De modo análogo, temos que para x variando no intervalo $[1,2]$ as restrições $y - z > -1 + x$ e $y + z < 3 - x$, garantem, respectivamente, as restrições $y - z > 1 - x$ e $y + z < 1 + x$.

Resumidamente, é possível observamos que o conjunto V_x é determinado por triângulos isósceles de vértices $(1 - x, 0)$, $(1 + x, 0)$ e $(1, x)$ para $\forall x \in [0,1]$ e $(-1 + x, 0)$, $(3 - x, 0)$ e $(1, 2 - x)$ para $\forall x \in [1,2]$. Esses triângulos podem ser melhor identificados quando pensamos na projeção de ‘cortes’ realizados perpendicularmente ao eixo x na pirâmide apresentada no conjunto W_x , ou seja, de maneira mais rudimentar, na ‘fatição’ vertical desta figura. Dessa forma, esses triângulos aparecem de acordo com a variação da variável x , partindo inicialmente de um ponto, quando $x = 0$ e apresentando assim um crescimento quando $x \rightarrow 1$ e um decréscimo para $x \in [1,2]$, até voltar a sua forma inicial de ponto quando $x = 2$.

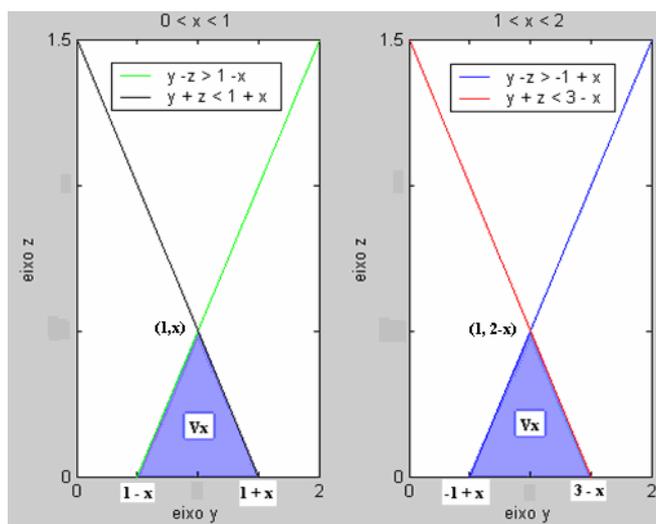


FIGURA 11: Conjunto Viável do Problema de Segundo Nível para $0 \leq x \leq 2$

Observação:

O conjunto viável do Problema de Segundo Nível quando x assume valores maiores que 2 é vazio, visto que as restrições envolvidas não apresentam uma região comum, como mostra a figura 12.

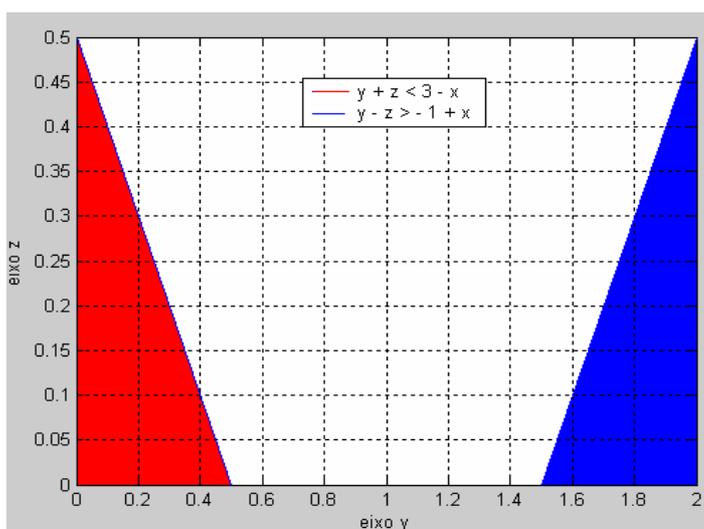


FIGURA 12: Conjunto Viável do Problema de Segundo Nível quando $x > 2$

➤ Conjunto Solução do Problema de Segundo Nível:

$$\text{Arg max } P(x) = \begin{cases} \{(1, x)\}, & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ \{(1, 2-x)\}, & \text{se } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Função valor :

$$V(x) = \begin{cases} f(x, 1, x) = -1 + 10x, & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ f(x, 1, 2-x) = 19 - 10x, & \text{se } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Como o problema do segundo nível busca a maximização, tem-se que o conjunto solução deste problema é dado justamente pelos pontos que descrevem as arestas da pirâmide de W_x , quando $y = 1$. Este fato pode ser melhor observado se atentarmos ao gradiente desta função, que nos dá a sua direção de crescimento.

Para este problema a figura 17 ilustra a solução do problema de segundo nível, quando x assume valor 0 e quando x assume valor 2 (pontos de cor verde). Essas soluções são de modo respectivo, os pontos (1,0) e (1,0).

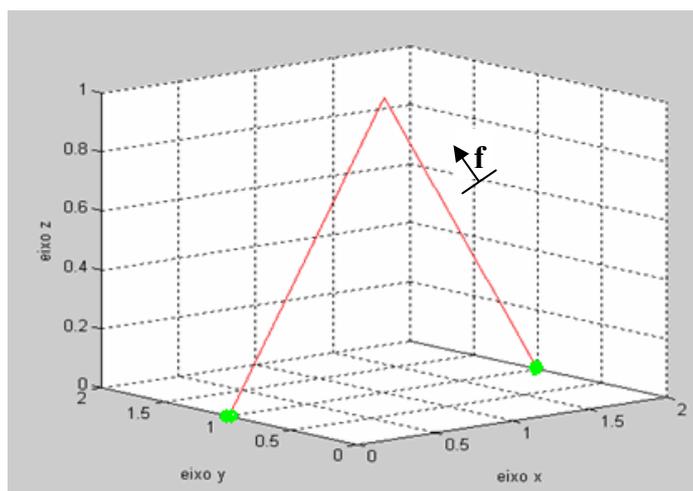


FIGURA 13: Conjunto Solução do problema de Segundo Nível.

➤ Conjunto Viável do PLDNP (V):

$$V = \{(x, 1, x) : 0 \leq x \leq 1\} \cup \{(x, 1, 2-x) : 1 \leq x \leq 2\}$$

Neste problema o conjunto V é representado pelas arestas em vermelho \overline{AM} e \overline{MC} da pirâmide do problema W_x , como mostra a figura 14. Na figura 15, observamos essas arestas, determinadas a partir da união dos pontos pertencentes ao conjunto solução do problema de segundo nível.

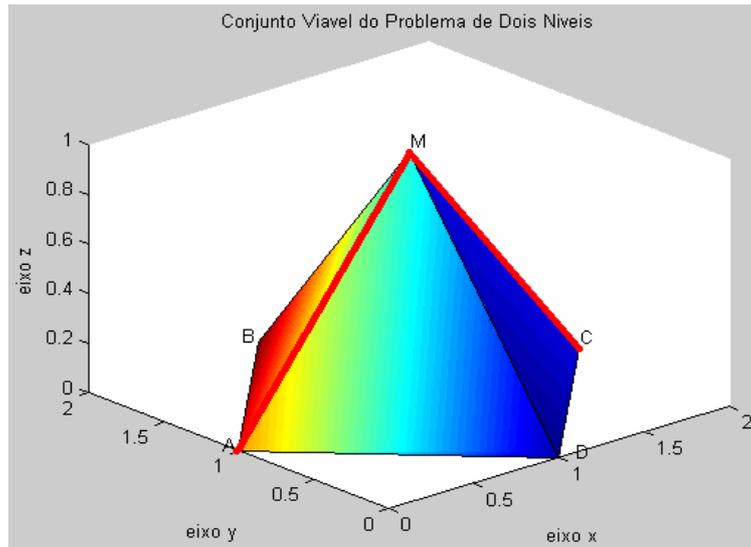


FIGURA 14: Conjunto Viável de PLDNP no Problema Relaxado.

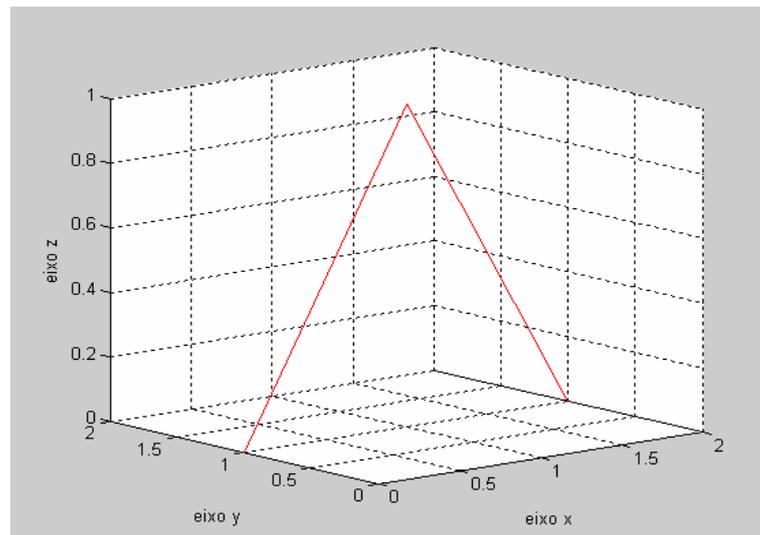


FIGURA 15: Conjunto Viável de PLDNP

➤ Conjunto Solução (V^*) do PDNLP:

$$V^* = \{(0, 1, 0)\}$$

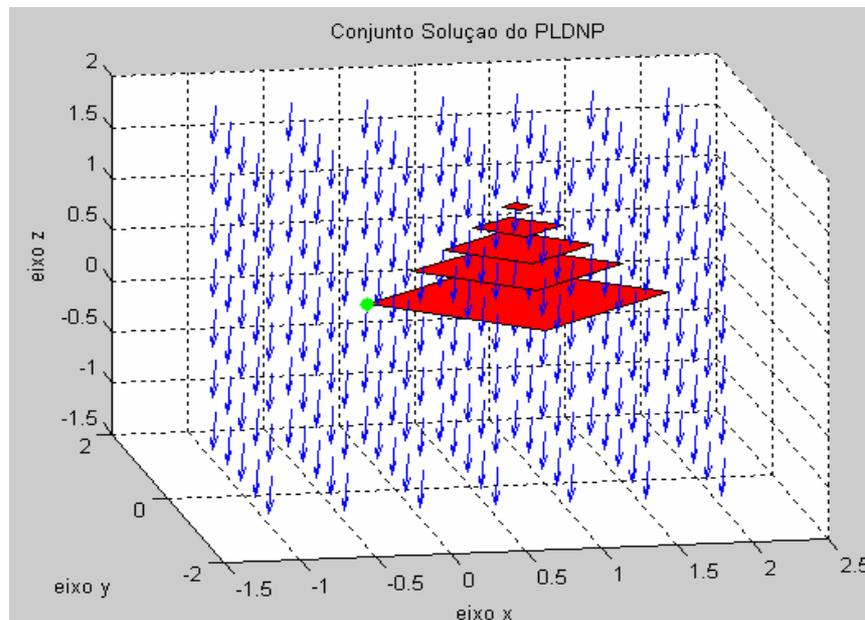


FIGURA 16: Conjunto Solução do PLDNP

De acordo com o conjunto viável de PLDNP, apresentado anteriormente, temos que a solução deste problema dá-se exatamente em um dos vértices (A, M ou C) da pirâmide de W_x . Sabendo, portanto que, o problema do líder busca a maximização, temos que isto acontece quando a variável de decisão do líder (x) assume valor mínimo, ou seja, zero. Pode-se observar isto através da figura 16, em que é possível notar a direção de crescimento (gradiente) desta função. Ainda nesta figura, ilustra-se através do ponto verde a solução (0,1,0) do problema em questão.

5. CONCLUSÕES

Com este trabalho foi possível apresentar em detalhes através da geometria aspectos, características e propriedades importantes de um problema de programação linear em Dois Níveis. Detalhes estes que em trabalhos fundamentalmente teóricos tornam-se possivelmente difíceis de serem compreendidos.

O embasamento teórico realizado quase que essencialmente nos trabalhos de Campêlo (1999) e Campêlo & Scheimberg (2005), foram de extrema importância para a compreensão dos detalhes neles teoricamente apresentados e aqui expostos geometricamente. É importante ressaltar também a extrema importância no domínio e manuseio dos softwares utilizados, visto que sem eles tal proposta não seria possível.

É importante salientar que a compreensão de um problema linear em Dois Níveis torna-se difícil à medida que a quantidade de variáveis de decisão envolvidas neste problema aumenta. Da mesma maneira acontece com sua geometria e consequentemente com sua interpretação, que tornam-se inviáveis em dimensões maiores que três.

Sabendo, portanto, da crescente e grande importância do problema linear em Dois Níveis na programação matemática, acredita-se que a proposta aqui apresentada possa contribuir de fato para a compreensão deste problema, contribuição assim com os fins didáticos e acadêmicos que o envolve.

5. REFERÊNCIAS

CAMPÊLO, M.B.N. Programação Linear em Dois Níveis: uma abordagem teórica e computacional. Tese (Doutorado em Ciências em Engenharia de Sistemas e Computação) – Rio de Janeiro – RJ, Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ, 1999.

CAMPÊLO, M. B.N; SCHEIMBERG, S. A Simplex Approach for Finding Local Solutions of a Linear Bilevel Program by Equilibrium Points, 2005. Submitted to: Annals of Operations Research, Kluwer, 138: 143 – 157. Disponível em: <http://www.lia.ufc.br/~mcampelo/mcampeloPublic.htm>. Acessado em: 28/ 07/ 2011.

CANDLER, W.; NORTON R. Multilevel programming. Technical Report 20, World Bank Development Research Center, Washington D.C, 1977.

DEMPE, S.; Foundations of bilevel programming; volume 61 de Nonconvex Optimization and Its Applications. Kluwer Academic Publishers, 2002.

LAVAL, A. S.; Modelo de Programação Linear em Dois Níveis para Otimização de Estoques de Sobressalentes. Ministério da Defesa Exército Brasileiro – Secretaria de Ciência e Tecnologia – Instituto Militar de Engenharia – Curso de Mestrado em Sistemas e Computação. Rio de Janeiro, 2003.

NEVES, J. C. S. Modelo de programação linear binível para a alocação dinâmica de veículos. Rio de Janeiro: COOPPE/UFRJ. Tese (Doutorado em Sistemas e Computação) – Coordenação dos Programas de Pós-Graduação de Engenharia da Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2002.

SANTOS, C. A. M. Programação em dois níveis aplicada ao estudo da oferta ótima em sistemas termelétricos. Rio de Janeiro: NCE /IM/UFRJ. Tese (Doutorado em Engenharia de Sistemas de Computação) – Instituto de Matemática do Núcleo de Computação Eletrônica da Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2002.

SOBRAL, F. N. C. Programação em Dois Níveis: Reformulação Utilizando as Condições KKT. Dissertação (Mestrado em Ciências) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado de São Paulo. São Paulo, 2008

VICENTE, L.; CALAMAI, P., Bilevel and multilevel programming: a bibliography review, Journal of Global Optimization, 5:291-306, 1994.

WEN, UE-PYNG; HSU, SHUH-TZY, Linear Bi-level Programming Problems – A Review, Operacional Research Society, 1991.